VÝZNAMNÉ VĚTY

PŘEHLED HLAVNÍCH VĚT

1. Věty o aproximaci

Věta 1 (Weierstrassova o aproximaci spojitých funkcí polynomy, 1885)**.** *Buď* $f \in \mathcal{C}([0,1])$ *a* $\varepsilon > 0$*. Potom existuje polynom* P *tak, že*

$$||f - P||_{\mathcal{C}([0,1])} < \varepsilon\,.$$

Důkaz. Náznak pomocí Bernsteinových polynomů □

Věta 2 (Korovkinova o třech funkcích, 1953)**.** *Nechť* $\{T_n\}$ *je posloupnost nezáporných lineárních operátorů na prostoru* $\mathcal{C}([0,1])$ *a* p_0, p_1, p_2 *polynomy definované pro* $x \in [0,1)$ *jako* $p_j : x \mapsto x^j$*,* $j = 0,1,2$*. Jestliže* $T_n p_j \rightrightarrows p_j$ *na* $[0,1]$ *pro* $j = 0,1,2$*, potom* $T_n f \rightrightarrows f$ *na* $[0,1]$ *pro každou funkci* $f \in \mathcal{C}([0,1])$*.*

Důkaz. Důkaz založen na lemmatu: Buď $f \in \mathcal{C}([0,1])$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta(\varepsilon) > 0$ tak, že

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon + \delta(\varepsilon)\, |x - y|^2\,, \quad x, y \in [0,1]\,.$$

□

Věta 3. *Nechť* $\mathcal{H}$ *je prostor testovacích funkcí na kompaktu* K*. Potom*

$$\{f \in \mathcal{C}(K) : f_* = f^* \textit{ na } K\} \subset \mathrm{Kor}(\mathcal{H})\,.$$

Poznámka. Je-li kompakt K metrizovatelný, potom

$$\{f \in \mathcal{C}(K) : f_* = f^* \text{ na } K\} = \mathrm{Kor}(\mathcal{H})\,.$$

Věta 4. *Je-li* $x \in K$ *exponující bod, potom* $f_*(x) = f^*(x)$ *pro každou* $f \in \mathcal{C}(K)$*.*

Důsledek 5. *Nechť* $\mathcal{H}$ *je prostor testovacích funkcí na kompaktu* K*. Pokud každý bod* K *je exponující, potom* $\mathrm{Kor}(\mathcal{H}) = \mathcal{C}(K)$*.*

Věta 6 (Müntz, 1914)**.** *Nechť* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$*. Potom* $\mathrm{span}\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots\}$ *je hustý v* $\mathcal{C}([0,1])$*, právě když*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty\,.$$

Důkaz. BD □

Poznámka. Poznámka o konvergenci Fourierových řad: du Bois Reymond 1876, Kolmogorov 1926, Carleson 1965, konvergence v Hilbertových prostorech, aplikace principu stejnoměrné konvergence.

Věta 7 (Fejér, 1900)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ *a nechť* $T_n f$ *značí aritmetický průměr* n *častečných součtů Fourierovy řady* f*. Potom* $T_n f \to f$ *stejnoměrně na* $[0, 2\pi]$ *pro každou* $f \in \mathcal{C}(2\pi)$*.*

2. Baireova věta o kategoriích

Věta 8 (Baire pro $\mathbb{R}$, 1899)**.** *Úplné metrické prostory jsou Baireovy.*

Věta 9. (a) *Každý úplný metrický prostor bez izolovaných bodů je nespočetný.*

(b) *Buď X Baireův prostor a $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ množina spojitých funkcí na X. Pokud*

$$M(x) := \sup\{f_\alpha(x) : \alpha \in A\} < \infty$$

pro každé $x \in X$, potom existuje otevřená neprázdná množina $G \subset X$ a $K > 0$ tak, že $M(x) < K$ pro každé $x \in G$.

(c) *(Princip stejnoměrné omezenosti) Buď X Banachův prostor, Y normovaný lineární prostor a $\mathfrak{G} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pokud*

$$\sup\{||Tx|| : T \in \mathfrak{G}\} < \infty$$

pro každé $x \in X$, potom

$$\sup\{||T|| : T \in \mathfrak{G}\} < \infty\,.$$

(d) *Banachův prostor nekonečné dimenze nemůže mít spočetnou Hamelovu bázi.*

Věta 10. *Lokálně kompaktní prostory jsou Baireovy.*

Věta 11 (Luzin, 1912)**.** *Buď P lokálně kompaktní σ–kompaktní prostor, μ Radonova míra na P a f μ–skoro všude konečná měřitelná funkce na P. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \subset P$ tak, že $\mu G < \varepsilon$ a $f \restriction P \setminus G$ je spojitá.*

Důkaz. Viz [LM], 18.2. □

Věta 12. (a) *(Blumberg, 1922) Buď f reálná funkce na $\mathbb{R}$. Potom existuje množina D hustá v $\mathbb{R}$ tak, že $f \restriction D$ je spojitá.*

(b) *(Bradford a Goffman, 1960) Buď P metrický prostor. Potom P je Blumbergův, právě když je Baireův.*

Důkaz. BD □

Poznámky. (a) Blumbergovy (topologické) prostory jsou vždy Baireovy.

(b) (Lukeš-Zajíček, 1976) Za předpokladu hypotézy kontinua existuje Baireův prostor, který není Blumbergův.

3. Axiom výběru a jeho důsledky

(AC) (Axiom výběru.) Buď $\mathfrak{M}$ disjunktní soustava neprázdných podmnožin množiny P. Potom existuje $X \subset P$ tak, že $X \cap M$ je jednobodová množina pro každé $M \in \mathfrak{M}$.

(WO) (Zemelova věta o dobrém uspořádání.) Každou množinu lze dobře uspořádat.

(HMP) (Hausdorffova věta o maximalitě.) Každá částečně uspořádaná množina obsahuje maximální totálně uspořádanou podmnožinu.

(ZL) (Zornovo lemma.) Každá částečně uspořádaná množina, v níž každý řetězec má horní závoru, má maximální prvek.

(TY) (Tichonovova věta.) Kartézský součin kompaktních topologických prostorů je kompakt.

(TYH) (Tichonovova věta.) Kartézský součin kompaktních Hausdorffových topologických prostorů je kompakt.

(KM*) (Krejn–Milmanova věta.) Uzavřená jednotková koule v duálu Banachova prostoru má extremální bod.

(KM) (Krejn–Milmanova věta.) Kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru má extremální bod.

(AL) (Alaogluova věta.) Uzavřená jednotková koule v duálu Banachova prostoru je w^*–kompaktní.

(HB) (Algebraická Hahn–Banachova věta.) Buď W vektorový prostor, M jeho podprostor, p sublineární funkcionál na W a f lineární forma na M. Jestliže $f \le p$ na M, potom existuje lineární forma F na W tak, že $F = f$ na M a $F \le p$ na W.

(HBO) (Hahn–Banachova věta.) Spojité lineární formy na Banachově prostoru oddělují body.

(BC) (Baireova věta o kategoriích.) Úplný metrický prostor je 2. kategorie.

(CG) (Věta o uzavřeném grafu.)

(PUB) (Princip stejnoměrné omezenosti.)

(BT) (Banach–Tarského paradox.) Uzavřenou jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^3$ lze "rozložit"na 5 disjunktních částí, z nichž lze pak "sestavit"dvě takovéto koule.

(non-LM) (Existence neměřitelné množiny.) Na $\mathbb{R}$ existuje lebesgueovsky neměřitelná množina.

(VBa) Každý reálný či komplexní vektorový prostor má (Hamelovu) bázi.

(HBa) Každý reálný či komplexní Hilbertův prostor má ortonormální bázi.

Věta 13 (Axiom výběru, ekvivalence a důsledky)**.** *V Zermelo–Fraenkelově axiomatické teorii množin platí následující vztahy:*

$$(AC) \iff (WO) \iff (ZL) \iff (HMP)$$
$$\Updownarrow$$
$$(TY) \iff (KM^*) \iff (AL \;\&\; KM)$$
$$\Downarrow \quad \not\Uparrow$$
$$(AL) \iff (TYH) \;\&\; (C)$$
$$\Downarrow \quad \not\Uparrow$$
$$(HB) \iff (HBO)$$
$$\Downarrow$$
$$(BT) \implies (non-LM)$$
$$(AC) \implies (BC) \implies (CG) \implies (PUB) \overset{?}{\implies} (CG) \overset{?}{\implies} (BC) \not\Longrightarrow (AC)$$
$$(AC) \implies (VBa) \overset{?}{\implies} (AC) \implies (HBa) \overset{?}{\implies} (AC)$$

Důkaz. BD $\square$

4. Konstrukce a existence spojitých funkcí

Lemma 14. *Existuje množina $A \subset \mathbb{R}$ typu F_σ tak, že*

$$\lambda(I \cap A) > 0 \quad a \quad \lambda(I \setminus A) > 0$$

pro každý interval $I \subset \mathbb{R}$.

Důkaz. Dvě konstrukce jsou uvedeny v [Problémy z MA], odst. 4.11. Jiný důkaz pomocí metrického prostoru opatřeného (pseudo)metrikou $\rho(A, B) := \lambda(A \Delta B)$. $\square$

Věta 15 (Charakteristika funkcí první Baireovy třídy)**.** *Buď P metrický prostor a f reálná funkce na P. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{B}_1(P)$,

(ii) *množiny* $\{x \in P : f(x) > \alpha\}$ *a* $\{x \in P : f(x) < \alpha\}$ *jsou* F_σ *pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Je–li P silně Baireův prostor, je též ekvivalentní podmínka

(iii) *je–li $F \subset P$ neprázdná uzavřená množina, potom existuje $x \in F$ tak, že $f \restriction F$ je spojitá v x.*

Věta 16. *Množina*

$$\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f \text{ je monotonní na nějakém intervalu } I \subset [0,1]\}$$

je první kategorie v $\mathcal{C}([0,1])$.

Věta 17 (Vlastnosti köpckeovských funkcí)**.** *Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ köpckeovská funkce a $[a,b] \subset \mathbb{R}$.*

(a) *Jestliže*

$$A := \{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\} \quad a \quad B := \{x \in \mathbb{R} : f'(x) < 0\},$$

potom A, B jsou disjunktní F_σ–množiny a

$$\lambda(A \cap I) > 0 \quad a \quad \lambda(B \cap I) > 0$$

pro každý interval $I \subset [a,b]$.

(b) *Derivace f' je na $[a,b]$ lebesgueovsky integrovatelná, ale není tam integrovatelná riemannovsky.*

Lemma 18. *Buď $\mathcal{D}$ vektorový prostor všech omezených funkcí na $\mathbb{R}$ opatřený sup–normou a*

$$\mathcal{D}_0 := \{f \in \mathcal{D} : \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} \text{ je hustá v } \mathbb{R}\}.$$

Potom $\mathcal{D}$ je Banachův prostor a $\mathcal{D}_0$ jeho uzavřený podprostor (a tedy též Banachův).

Věta 19 (Weil, 1976)**.** *Množina*

$$\{f \in \mathcal{D}_0 : \text{existuje interval } I_f \subset \mathbb{R} \text{ tak, že } f \text{ na } I_f \text{ nemění znaménko}\}$$

je 1. kategorie v $\mathcal{D}_0$.

5. Integrace vzhledem ke konečně aditivním mírám

Věta 20. *Prostory* ba$(\mathcal{S})$ *všech konečně aditivních měr a $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ všech omezených $\mathcal{S}$–měřitelných funkcí opatřených příslušnými normami jsou Banachovy.*

Důkaz. BD □

Věta 21. *Prostory* ba$(\mathcal{S})$ *a $(\mathcal{B}(\mathcal{S}))^*$ jsou izometricky izomorfní. Je-li $L \in (\mathcal{B}(\mathcal{S}))^*$, existuje právě jedna $\nu \in \mathrm{ba}(\mathcal{S})$ tak, že*

$$Lf = \int_X f \, d\nu \text{ pro } f \in \mathcal{B}(\mathcal{S}) \text{ a } ||L|| = ||\nu||.$$

Speciálně, duál k ℓ^∞ je izometricky izomorfní s ba.

6. Phillips, Schur a aplikace

Věta 22 (Phillips, 1940)**.** *Buďte $\nu_n \in \mathrm{ba}$ s vlastností $\nu_n(E) \to 0$ pro každou množinu $E \subset \mathbb{N}$. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\nu_n(\{j\})| = 0.$$

Speciálně, $\nu_n(\{n\}) \to 0$.

Důkaz. BD □

Lemma 23. *Buď X Banachův prostor a M jeho komplementovaný podprostor. Dále buďte $f_n \in M^*$ takové funkcionály, že $f_n \xrightarrow{w^*} 0$. Potom existují $g_n \in X^*$ tak, že*

$$g_n = f_n \quad \text{na } M \quad a \quad g_n \xrightarrow{w^*} 0.$$

Věta 24 (Phillips, 1940). *Prostor c_0 nemá v ℓ^∞ topologický doplněk.*

Věta 25 (Schur). *Konverguje-li posloupnost $\{f_n\}$ v prostoru ℓ^1 slabě, konverguje $\{f_n\}$ již v normě.*

XXXXXXXXXXXXXX KONEC ZIMNÍHO SEMESTRU XXXXXXXXXXXXX

7. Věty o aproximaci a rozšiřování

Lemma 26. *Existuje posloupnost polynomů $\{P_n\}$ tak, že $P_n \rightrightarrows |x|$ na $[0,1]$.*

Důkaz. Různé důkazy. □

Věta 27 (Stone–Weierstrass). *Buď K kompaktní prostor a $\mathcal{A} \subset\subset \mathcal{C}(K)$. Je–li $\mathcal{A}$ buď algebra anebo svaz obsahující konstanty a oddělující body K, potom $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(K)$.*

Poznámka. Buď K kompaktní prostor a $\mathcal{A} \subset\subset \mathcal{C}(K)$ obsahující konstanty. Je–li $\mathcal{A}$ algebra, potom $\overline{\mathcal{A}}$ je svaz a je–li $\mathcal{A}$ svaz, je $\overline{\mathcal{A}}$ algebra.

Věta 28. *Buď K kompaktní prostor. Potom prostor $\mathcal{C}(K)$ je separabilní, právě když K je metrizovatelný.*

Důkaz. Různé důkazy obou implikací. □

Věta 29. *Buďte S, T kompaktní prostory a*

$$\mathcal{A} := \{f : \text{existuje } n \text{ a } g_j \in \mathcal{C}(S)\,, h_j \in \mathcal{C}(T) \text{ tak, že } \ f(x,y) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\, h_j(y)\}\,.$$

Potom $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(S \times T)$.

Věta 30. *Buď (K,ρ) metrický kompakt a $\mathcal{H}$ množina funkcí $h \in \mathcal{C}(K)$, pro něž existuje $C_h > 0$ tak, že*

$$|h(x) - h(y)| \le C_h \rho(x,y) \text{ pro všechna } \ x, y \in K\,.$$

Potom $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(K)$.

Věta 31 (Tietze, 1915). *Buď M uzavřená podmnožina metrického prostoru P a $f \in \mathcal{C}(M)$. Potom existuje $F \in \mathcal{C}(P)$ tak, že $F = f$ na M a $f(P) \subset \operatorname{co} f(M)$.*

Důkaz. Klasický důkaz, ale také důkaz pomocí Stone–Weierstrassovy věty pro kompaktní případ. □

Věta 32 (Urysohn, 1925). *Buďte A, B uzavřené disjunktní podmnožiny metrického prostoru P. Potom existuje $f \in \mathcal{C}(P)$ tak, že $\operatorname{co} f(P) \subset [0,1]$, $f = 0$ na A a $f = 1$ na B.*

Věta 33 (Charakteristika normálních prostorů). *Buď X topologický (Hausdorffův) prostor. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *X je normální,*

(ii) [Urysohn] *jsou–li $A, B \subset X$ disjunktní uzavřené, potom existuje $f \in \mathcal{C}(X)$ tak, že*

$$\operatorname{co} f(X) \subset [0,1], f = 0 \text{ na } A, f = 1 \text{ na } B\,,$$

(iii) [Tietze] *je–li $M \subset X$ uzavřená a $f \in \mathcal{C}(M)$, potom existuje $F \in \mathcal{C}(X)$ tak, že*

$$F = f \text{ na } M \text{ a } F(X) \subset \operatorname{co} f(M)\,,$$

(iv) [Tong – Katětov] *je–li f shora polospojitá na X, g zdola polospojitá na X a $f \le g$ na X, potom existuje $F \in \mathcal{C}(X)$ tak, že $f \le F \le g$ na X.*

Důkaz. BD □

Věta 34 (Dugundji, 1951)**.** *Buď M uzavřená podmnožina metrického prostoru P, Y lokálně konvexní prostor a $f : M \to Y$ spojité zobrazení. Potom existuje spojité zobrazení $F : P \to Y$ tak, že*

$$F = f \text{ na } M \text{ a } F(P) \subset \operatorname{co} f(M)\,,$$

Důkaz. BD □

Věta 35 (Brouwer, 1909)**.** *Buď K kompaktní konvexní podmnožina konečně dimenzionálního Banachova prostoru X a $f : K \to K$ spojité zobrazení. Potom existuje $x \in K$ tak, že $f(x) = x$.*

Důkaz. Bez důkazu pro jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^n$ a poté použít Dugundjiho větu. □

Věta 36 (Borsuk 1933, Dugundji 1951)**.** *Buď M uzavřená podmnožina metrického prostoru P. Potom existuje lineární operátor $L : \mathcal{C}(M) \to \mathcal{C}(P)$ tak, že $Lf = f$ na M a $Lf(P) \subset \operatorname{co} f(M)$ pro $f \in \mathcal{C}(M)$.*

Důkaz. Důkaz pomocí Dugundjiho věty. □

Označení. (a) Buď $U \subset \mathbb{R}^n$, $(n \geq 3)$, omezená otevřená a S uzavřená podmnožina regulárních bodů U. Označme

$$\mathcal{H}_U := \{h \in \mathcal{C}(\overline{U}) : h \text{ harmonická na } U\}\,.$$

(b) Buď $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ a $S \subset \partial\Delta$ uzavřená Lebesgueovy míry nula. Označme

$$\mathcal{H}_\Delta := \{h \in \mathcal{C}(\Delta) : h \text{ analytická na } \operatorname{Int}\Delta\}\,.$$

Věta 37 (Bliedtner a Hansen, 1984)**.** *Existuje pozitivní lineární operátor $L : \mathcal{C}(S) \to \mathcal{H}_U$.*

Důkaz. BD □

Věta 38 (Rudin, Carleson 1956)**.** *Existuje pozitivní lineární operátor $L : \mathcal{C}(S) \to \mathcal{H}_\Delta$.*

Důkaz. BD □

8. **Selekce vět o aproximaci**

Věta 39 (Fréchet–Riesz, 1907)**.** *Buď H (reálný) Hilbertův prostor a $F \in H^*$. Potom existuje právě jeden prvek $h \in H$ tak, že*

$$F(x) = (x, h) \quad \text{pro každé } x \in H\,.$$

Důkaz. Dva různé důkazy. □

Věta 40. *Uzavřené konvexní podmnožiny Hilbertova prostoru jsou Čebyševovy.*

Důkaz. Dva různé důkazy. □

Věta 41 (Ascoliho formulka)**.** *Buď X Banachův prostor, $\varphi \in X^*$, $||\varphi|| = 1$ a $x \in X$. Potom*

$$\operatorname{dist}(x, \ker\varphi) = |\varphi(x)|\,.$$

Věta 42. *Pro Banachův prostor X jsou nsledující výroky ekvivalentní:*

(i) *je-li $C \subset X$ konvexní a $x \in X$ takový bod, že $P_M(x) \neq \emptyset$, je $P_M(x)$ jednobodová množina,*
(ii) *jsou-li $x, y \in S_X$, $x \neq y$, potom $||\frac{x+y}{2}|| < 1$,*
(iii) *sféra S_X neobsahuje úsečky,*
(iv) $\operatorname{ext} B_X = S_X$.

Důkaz. BD □

Věta 43 (James)**.** *Pro Banachův prostor X jsou nsledující výroky ekvivalentní:*

(i) *X je reflexivní,*
(ii) *každá uzavřená konvexní podmnožina X je proximinální,*
(iii) *je-li H uzavřená nadrovina v X, potom $P_M(0) \neq \emptyset$.*

Důkaz. Dva důkazy pro imlikaci $(i) \implies (ii)$. □

Věta 44 (Day–James)**.** *Banachův prostor X je reflexivní a striktně konvexní, právě když každá neprázdná uzavřená konvexní podmnožina X je Čebyševova.*

Věta 45 (Motzkin, 1935)**.** *Uzavřené Čebyševovy podmnožiny $\mathbb{R}^n$ jsou konvexní.*

Důkaz. BD □

Věta 46. *Buď C konvexní podmnožina Hilbertova prostoru. Potom $\operatorname{far} C \subset \operatorname{ext} C$.*

Věta 47 (Kejn–Milmanova věta v Hilbertových prostorech)**.** *Buď X neprázdná kompaktní konvexní podmnožina Hilbertova prostoru. Potom*

$$X = \overline{\operatorname{co}} \operatorname{far} X \ (= \overline{\operatorname{co}} \operatorname{ext} X)\,.$$

Věta 48 (Krejn–Milmanova, 1940)**.** *Buď C neprázdná kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru. Potom $C = \overline{\operatorname{co}} \operatorname{ext} C$.*

Důkaz. Pouze myšlenka důkazu □

Věta 49. *Buď X separabilní Banachův prostor. Potom existuje prostý operátor $T \in \mathcal{L}(X, \ell^2)$.*

Věta 50 (Keller, 1931)**.** *Buď K metrizovatelná kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru. Potom K je afinně homeomorfní kompaktní konvexní podmnožině prostoru ℓ^2.*

Věta 51 (Krejn–Milmanova věta v metrizovatelném případě)**.** *Buď K neprázdná metrizovatelná kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru. Potom $K = \overline{\operatorname{co}} \operatorname{ext} K$.*

Důkaz. Pomocí Vět 47 a 50. □

Věta 52. *Buď X kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru a $x \in X$. Potom existuje $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ mající za těžiště x a přitom $\operatorname{spt} \mu \subset \overline{\operatorname{ext} X}$.*

9. **KMP versus RNP**

Věta 53 (Lebesgue–Radon–Nikodym)**.** *Buďte μ, ν nezáporné konečné míry na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$. Je–li ν absolutně spojitá vůči μ, existuje právě jedna nezáporná $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že*

$$\nu(A) = \int_A h \, d\mu \quad \textit{pro každé} \quad A \in \mathcal{S}\,.$$

Důkaz. Důkaz von Neumannův. kromě toho náznaky důkazů variačního, pomocí Hahnova rozkladu znaménkové míry či pomocí Zornova lemmatu □

Lemma 54. *Buď D omezená podmnožina Banachova prostoru. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) *D je zářezová,*
(ii) *ke každému $\varepsilon > 0$ existuje plátek $S \subset D$ s vlastností $\operatorname{diam} S < \varepsilon$.*

Příklad. Uzavřená jednotková koule v prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ není zářezová.

Věta 55 (Lindenstrauss, 1966)**.** *Pro Banachův prostor X je ekvivalentní:*

(i) *X má Krejn–Milmanovu vlastnost,*

(ii) *je–li* $B \subset X$ *neprázdná omezená uzavřená konvexní, potom* $\operatorname{ext} B \neq \emptyset$.

Důkaz. Pouze náznak přes Mazurovu větu a Bishop–Phelpsovu větu. □

Věta 56 (Lindenstrauss, 1966)**.** *Radon–Nikodymova vlastnost Banachova prostoru (definovaná pomocí plátků) implikuje Krejn–Milmanovu vlastnost.*

Důkaz. Náznak podobně jako u Krejn–Milmanovy věty ale s využitím Cantorovy věty. □

Poznámka. Otevřeným problémem zůstává, zda KMP implikuje RNP.

XXXXXXXXXXXXXX KONEC LETNÍHO SEMESTRU XXXXXXXXXXXXX